ЛР №3 Определение пропускной способности дискретного канала.

Тема: Выполнение расчетов по теореме отчетов. Определение пропускной способности дискретного канала**.**

Цель: научиться выполнять расчеты по теореме отчетов и определять пропускную способность дискретного канала.

Время выполнения: 2 часа

Оборудование: ПК.

Программное обеспечение: операционная система, калькулятор, текстовый редактор.

Теоретические основы

Пусть на вход аналогово-цифрового преобразователя поступает гармонический сигнал с частотой f(период $T= 1/f$).частоты исходного сигнала

Проведем дискретизацию входного аналогового сигнала с периодом дискретизации $T_д$меньшим половины периода входного сигнала T (рисунок 1).

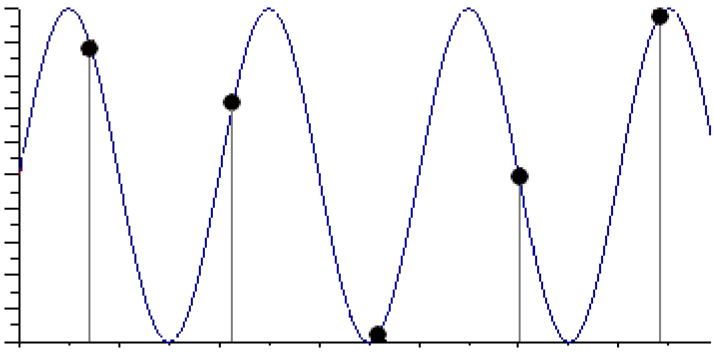

Рисунок 1

Очевидно, что дискретные отсчеты сигнала однозначно не отображают форму исходного сигнала, в частности по получившимся точкам можно построить гармонический сигнал с периодом $T_{искаж.}$, отличающимся от периода исходного сигнала T. Период $T_{искаж}$ больше периода исходного сигнала T, соответственно частота меньше, частоты исходного сигнала f(рисунок 2).

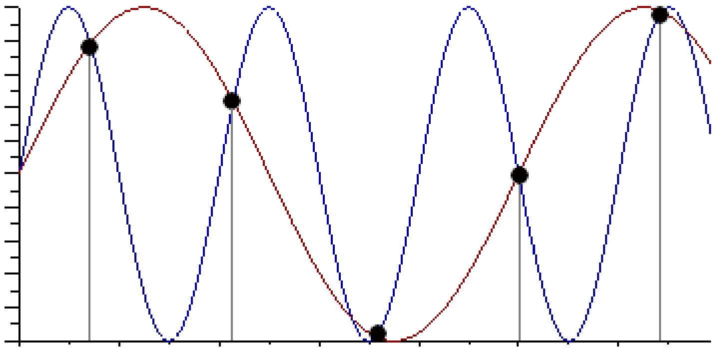

Рисунок 2

Данный эффект называется стробоскопическим эффектом или алиасингом. Он заключается в появлении ложной низкочастотной составляющей при дискретизации сигнала с частотой меньшей удвоенной частоты исходного сигнала (или с периодом большим половины периода исходного сигнала), отсутствующей в исходном сигнале.

Пример 2

Уменьшим период дискретизации до половины периода исходного аналогового сигнала (частоту дискретизации увеличим до удвоенной частоты исходного сигнала). В данной ситуации возникает неопределенность начальной фазы и амплитуды сигнала, при этом частота исходного сигнала не искажается. В крайнем случае мы можем получить отсчеты сигнала равные нулю (рисунок 3).

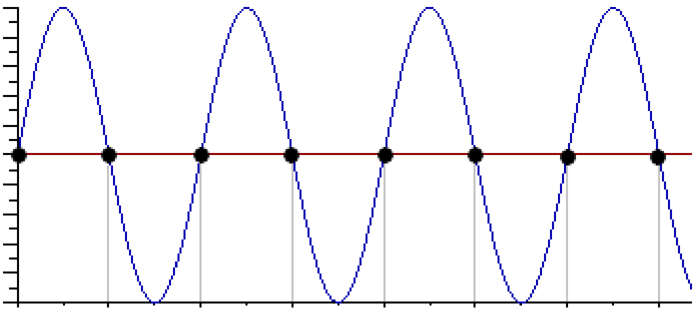

Рисунок 3

Пример 3

Продолжим уменьшение периода дискретизации. Если период дискретизации меньше половины периода исходного сигнала, то очевидно, что через получившиеся после оцифровки точки можно построить только один гармонический сигнал, соотвествующий исходному, без искажения начальной фазы, амплитуды и частоты (рисунок 4). Данное утверждение теоретически обосновано и мы его примем без доказательства.

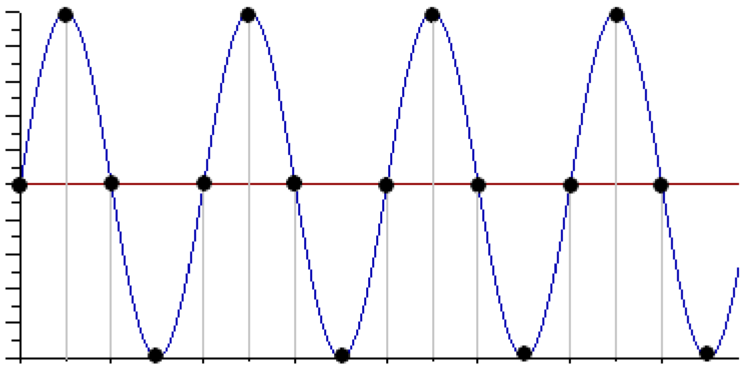

Рисунок 4

Таким образом, для адекватного восстановления гармонического сигнала по дискретным отсчетам, частота дискретизации должна быть не меньше половины частоты сигнала. Частота равная половине частоты дискретизации называется частотой Найквиста $f_N = f_Д/2$.

Данное утверждение можно обобщить следующим образом:

Аналоговый сигнал с ограниченным спектром может быть восстановлен однозначно и без искажений по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой большей удвоенной максимальной частоты в своем спектре.

$f\partial > 2 \cdot F_{max}$ **(1)**

Данное утверждение известно как **теорема Котельникова** (в западной литературе **теорема Найквиста-Шеннона**) или теорема отсчетов. В различных источниках в формулировке данной теоремы могут быть различия, основным из которых является знак сравнения в формуле 1: $f\partial \geq 2 \cdot F_{max}$ или $f\partial > 2 \cdot F_{max}$. Мы придерживаемся формулировки со знаком **строго больше,** так как при частоте оцифровки равной максимальной частоте в спектре возникают неоднозначности начальной фазы и амплитуды.

На практике аналоговый сигнал, как правило, оцифровывают с частотой в несколько раз превышающей удвоенную частоту в спектре сигнала, хотя существуют методики оцифровки сигнала с нарушением теоремы отсчетов.

Пусть сигнал $y(t)$ на выходе канала представляет собой сумму полезного сигнала $x(t)$ и шума $n(t)$, т.е. $y(t) = x(t) + n(t)$, причем $x(t)$ и $n(t)$ статистически независимы. Допустим, что канал имеет ограниченную полосу пропускания шириной $\Delta F_{НК}$. Тогда в соответствии с теоремой Котельникова (см. п. 1.5) функции $y(t)$, $x(t)$ и $n(t)$ можно представить совокупностями отсчетов y_i, x_i, и n_i, $i = 1,2,\ldots,L$, где $L = 2\Delta F_{НК} T$. При этом статистические свойства сигнала $x(t)$ можно описать многомерной ПРВ $w(x_1, x_2, \ldots, x_L) = w(x)$, а свойства шума – ПРВ $w(n_1, n_2, \ldots, n_L) = w(n)$.

Пропускная способность непрерывного канала определяется следующим образом:

$$C = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \max_{w(x)} I(X,Y),$$

где $I(X,Y)$ – количество информации о какой-либо реализации сигнала $x(t)$ длительности Т, которое в среднем содержит реализация сигнала $y(t)$ той же длительности , а максимум ищется по всем возможным распределениям $w(x)$.

Когда сигнал на входе канала имеет нормальное распределение и отсчеты независимы величина $h(X)$ максимизируется [6]. Поэтому пропускная способность гауссовского канала с дискретным временем, рассчитанная на единицу времени, с учетом (4.16) может быть записана в виде

$$C = V_И \cdot I(Y,X) = \frac{V_И}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_c^2 + \sigma^2}{\sigma^2}\right) = \frac{V_И}{2}\log_2\left(1+h^2\right).$$

Полученное выражение показывает, что пропускная способность гауссовского канала с дискретным временем определяется числом импульсов, передаваемых в секунду, и отношением сигнал/шум (h).

С учетом взаимосвязи скорости передачи информации и полосы частот непрерывного канала от (4.17) можно перейти к формуле Шеннона, которая устанавливает связь пропускной способности гауссовского канала с полосой пропускания непрерывного канала и отношением мощности сигнала к мощности помехи:

$$C = \Delta F_{НК} \log_2\left(1+h^2\right).$$

График отношения $\frac{C}{\Delta F_{НК}} = \log_2\left(1+h^2\right)$ изображен на рис. 4.6. Заметим, что при малом отношении $h^2 << 1$

$$C \cong \Delta F_{НК} \cdot 1{,}442 \cdot h^2,$$

а пропускная способность канала связи прямо пропорциональна этому отношению.

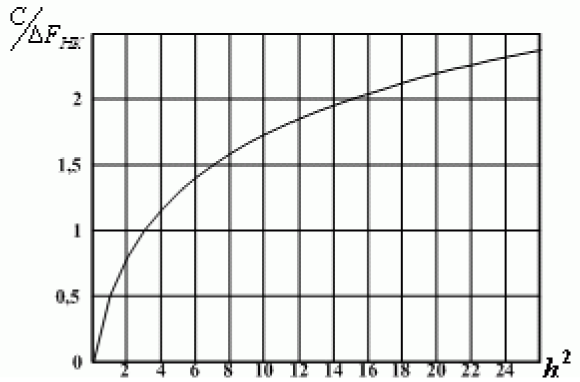

Рисунок 5 Пропускная способность непрерывного сигнала

При большом отношении $h^2 >> 1$ в (4.18) можно пренебречь единицей и считать, что

$$\frac{C}{\Delta F_{НК}} \approx \log_2\left(h^2\right),$$

т.е. зависимость пропускной способности непрерывного канала от отношения сигнал/шумлогарифмическая.

Пропускная способность канала, как предельное значение скорости безошибочной передачи информации, является одной из основных характеристик любого канала.

Определим пропускную способность стандартного канала тональной частоты, имеющего границы эффективно передаваемых частот $0{,}3 \ldots 3{,}4$ кГц, среднюю мощность сигнала на выходе 56 мкВт при средней мощности помехи 69000 пВт.

Согласно (4.18), при заданных параметрах

$$C_{НК} = 3{,}1 \cdot 10^3 \cdot \log_2\left(\frac{56 \cdot 10^{-6}}{69 \cdot 10^{-12}}\right) = 3{,}0 \cdot 10^4$$ [бит/с].

Для непрерывных каналов справедлива теорема Шеннона, согласно которой сообщения дискретного источника могут быть закодированы и переданы по непрерывному каналу так, что вероятность ошибочного декодирования принятого сигнала $y(t)$ будет меньше наперед заданной положительной величины $p^*_{ош}$, если производительность источника $H'(X)$ меньше пропускной способности C непрерывного канала.

Для типовых непрерывных каналов многоканальной связи основные технические характеристики и пропускная способность, вычисленная по формуле Шеннона (4.18), при отношении сигнал/шум 20 дБ, приведены в табл. 4.

Зная пропускную способность канала и информационные характеристики сообщений (табл. 4.5), можно определить, какие сообщения (первичные сигналы) можно передавать по заданному каналу.

Таблица 1 Характеристики типовых каналов многоканальной связи

Наименование канала	Границы передаваемых частот, Гц	Пропускная способность, бит/с
Тональной частоты	300...3400	20,64·103
Предгрупповой широкополосный	12,3·103...23,4·103	73,91·103
Первичный широкополосный	60,6·103...107,7·103	313,6·103
Вторичный широкополосный	312,3·103...551,4·103	1,59·106
Третичный широкополосный	812,3·103...2043,7·103	8,2·106

Таблица 2 Производительность источников сообщений

Вид сообщения	Характер сообщения	Параметры АЦП	Производительность, бит/с	
$f_д$, Гц	$N = \log_2 L$			
Телеграфные, 50 Бод	дискретные	–	–	30…50
Телефонные	непрерывные	8·103		64·103
Звукового вещания: первого класса	непрерывные	24·103		240·103
высшего класса	непрерывные	32·103		416·103
Факсимильные, 120 строк/с: полутоновые	непрерывные	2,93·103		11,72·103
штриховые	дискретные	–	–	2,93·103
Передача данных, 2400 Бод	дискретные	–	–	2,4·103
Телевизионные	непрерывные	13·106		208·106

Например, первичный сигнал телевизионного вещания имеет $H'(X) = 208 \cdot 10^6 бит/c$ (табл. 5) и поэтому не может быть передан ни по одному из типовых непрерывных или цифровых каналов без потери качества. Следовательно, для передачи сигнала телевизионного вещания требуется создание специальных каналов с более высокой пропускной способностью или снижение скорости цифрового потока.

1.Число символов алфавита $m = 4$. Вероятности появления символов равны соответственно $p1 = 0{,}15$; $p2 = 0{,}4$; $p3 = 0{,}25$; $p4 = 0{,}2$. Длительности символов $t1 = 3с$; $t2 = 2с$; $t3 = 5с$, $t4 = 6с$. Чему равна скорость передачи сообщений, составленных из таких символов?

2. Сообщения составлены из пяти качественных признаков ($m = 5$). Длительность элементарной посылки $t = 20мс$. Определить, чему равна скорость передачи сигналов и информации.

3. Определить пропускную способность бинарного канала связи, способного передавать 100 символов 0 или 1 в единицу времени, причем каждый из символов искажается (заменяется противоположным) с вероятностью $p = 0{,}01$.

4. Имеются источник информации с энтропией в единицу времени $H(X) = 100$ дв.ед. и два канала связи; каждый из них может передавать в единицу времени 70 двоичных знаков (0 или 1); каждый двоичный знак заменяется противоположным с вероятностью $p = 0{,}1$. Требуется выяснить, достаточна ли пропускная способность этих каналов для передачи информации, поставляемой источником.

5. Чему равна пропускная способность симметричного канала, если источник вырабатывает сигналы со скоростью 2 знака в секунду, закодированные кодом с основанием $m = 10$, а вероятность ложного приема $p = 0{,}3$?

6. Сообщения составлены из алфавита $X = (x1, x2, x3)$. Вероятности появления символов алфавита 0,7; 0,2; 0,1 соответственно. Помехи в канале связи заданы следующей канальной матрицей:

$$P(Y/X) = \begin{vmatrix} 0{,}98 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

Определить скорость передачи информации, если время передачи одного символа $t1 = 0{,}02с$.

7. Чему раина пропускная способность канала связи, описанного канальной матрицей:

$$P(A,B) = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{vmatrix}$$

если известно, что на выходе источника сообщений символы вырабатываются со скоростью 100 знаков в секунду?

8. Определить максимально возможную скорость передачи информации по радиотехническому каналу связи пункта управления с телеуправляемой ракетой, если полоса пропускания канала связи равна 3 МГц, а минимальное отношение сигнал-шум по мощности в процессе наведения ракеты на цель равно 3.

9. Определить полосу пропускания канала передачи телевизионного черно-белого изображения с 5х105 элементами, 25 кадрами в секунду и 8 равновероятными градациями яркости для отношения P/N = 15 при условии, что изображение может принимать наиболее хаотичный вид «белого шума».

Отчет

- Отчет должен быть оформлен в текстовом редакторе и содержать:
- ✓ наименование работы;
- ✓ цель работы;
- ✓ задание;
- ✓ последовательность выполнения работы;
- ✓ ответы на контрольные вопросы;
- ✓ вывод о проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Что такое пропускная способность канала передачи информации? Чем отличается пропускная способность от скорости передачи информации по каналу связи?

2. Чем отличается информационная скорость передачи от технической, и в каких единицах эти скорости измеряются?

3. Как изменяется пропускная способность дискретного канала связи при воздействии на канал помех.

4. Сформулируйте основную теорему Шеннона о кодировании для канала без помех.

5. Сформулируйте и поясните теорему Шеннона о кодировании для канала с помехами.

6. Приведите выражение пропускной способности для дискретного канала без помех и с помехами.

7. Сформулируйте и поясните теорему отсчетов (Котельникова)

8. Какие параметры влияют на объем сигнала.

9. От чего зависит пропускная способность непрерывного канала связи.

10. Назовите условия согласования источников информации с пропускной способностью непрерывных каналов связи.

11. Какова скорость отображения информации приемным устройством отображения информации.