

Практическое занятие № 3

Тема программы: **Теорема отчетов.**

Тема: Применение теоремы отчетов.

Цель: Изучение возможности синтеза сигналов по дискретным отсчетам в соответствии с теоремой Котельникова.

Время выполнения: 2 часа

Оборудование: ПК.

Программное обеспечение: операционная система, калькулятор, текстовый редактор.

Теоретические основы

Теорема Котельникова

В 1933 году В.А. Котельниковым доказана теорема отчетов, имеющая важное значение в теории связи: непрерывный сигнал $s(t)$ с ограниченным спектром можно точно восстановить (интерполировать) по его отсчетам $s(k\Delta t)$, взятым через интервалы $\Delta t = \frac{1}{2F}$, где F – верхняя частота спектра сигнала.

В соответствии с этой теоремой сигнал $s(t)$ можно представить рядом Котельникова

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{k}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F \left[t - \frac{k}{2F} \right]}{2\pi F \left[t - \frac{k}{2F} \right]} \quad (1)$$

Таким образом, сигнал $s(t)$, можно абсолютно точно представить с помощью последовательности отсчетов $s\left(\frac{k}{2F}\right)$, заданных в дискретных точках $\frac{k}{2F}$ (рис.1).

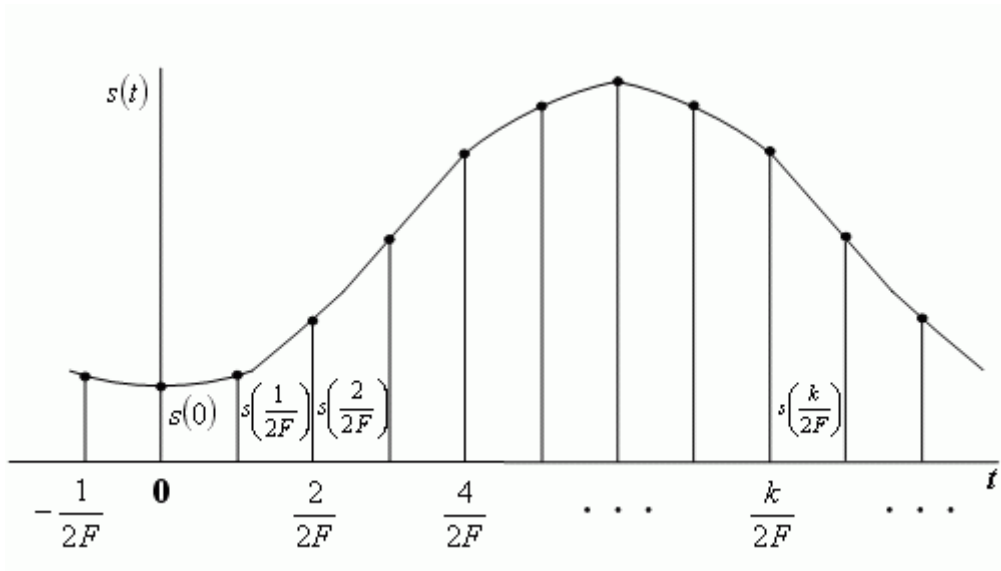


Рисунок 1 сигнала и его отсчёты

Функции

$$\psi(t) = \frac{\sin 2\pi F \left[t - \frac{k}{2F} \right]}{2\pi F \left[t - \frac{k}{2F} \right]} \quad (2)$$

образуют ортогональный базис в пространстве сигналов, характеризующихся ограниченным спектром:

$$\Phi(f) = 0 \quad \text{при} \quad |f| > F \quad (3)$$

Обычно для реальных сигналов можно указать диапазон частот, в пределах которого сосредоточена основная часть его энергии и которым определяется ширина спектра сигнала. В ряде случаев спектр сознательно сокращают. Это обусловлено тем, что аппаратура и линия связи должны иметь минимальную полосу частот. Сокращение спектра выполняют, исходя из допустимых искажений сигнала. Например, при телефонной связи хорошая разборчивость речи и узнаваемость абонента обеспечиваются при передаче сигналов в полосе частот $\Delta F = 0,3 \dots 3,4$ [кГц]. Увеличение ΔF приводит к неоправданному усложнению аппаратуры и повышению затрат. Для передачи телевизионного изображения при стандарте в 625 строк полоса частот, занимаемая сигналом, составляет около 6 МГц.

Из вышесказанного следует, что процессы с ограниченными спектрами могут служить адекватными математическими моделями многих реальных сигналов.

Функция вида $\frac{\sin 2\pi F \left[t - \frac{k}{2F} \right]}{2\pi F \left[t - \frac{k}{2F} \right]}$ называется функцией отсчетов (рис.2).

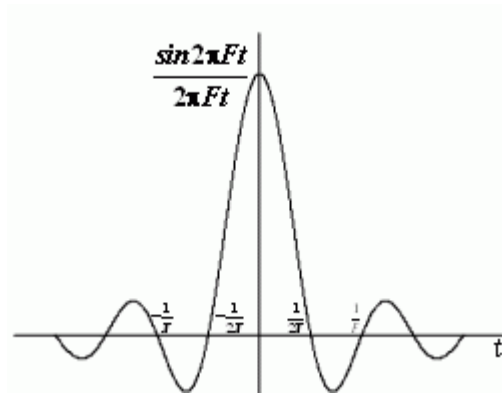


Рисунок 2 функция отсчетов

Она характеризуется следующими свойствами. Если $k = 0$, функция отсчетов имеет максимальное значение при $t = 0$, а в моменты времени $t = \frac{i}{2F}$ ($i = 1, 2, \dots$) она обращается в нуль; ширина главного лепестка функции отсчетов на нулевом уровне равна $\frac{1}{F}$, поэтому минимальная длительность импульса, который может существовать на выходе линейной системы с полосой пропускания F , равна $\frac{1}{F}$; функции отсчетов ортогональны на бесконечном интервале времени.

На основании теоремы Котельникова может быть предложен следующий способ дискретной передачи непрерывных сигналов:

Для передачи непрерывного сигнала $s(t)$ по каналу связи с полосой пропускания F определим мгновенные значения сигнала $s(t)$ в дискретные моменты времени $t_k = \frac{k}{2F}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$). После этого передадим эти значения по каналу связи каким - либо из возможных способов и восстановим на приемной стороне переданные отсчеты. Для преобразования потока импульсных отсчетов в непрерывную функцию пропустим их через идеальный ФНЧ с граничной частотой F .

Можно показать, что энергия сигнала находится по формуле [6, 32]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s^2\left(\frac{k}{2F}\right) \quad (4)$$

Для сигнала, ограниченного во времени, выражение (1.24) преобразуется к виду:

$$E = \int_1^{2FT} s^2(t) dt = \frac{1}{2F} \sum_{k=1}^{2FT} s^2\left(\frac{k}{2F}\right) \quad (5)$$

Выражение (1.25) широко применяется в теории помехоустойчивого приема сигналов, но является приближенным, т.к. сигналы не могут быть одновременно ограничены по частоте и времени.

Практическое задание

1. Изобразить сигналы, синтезируемые в лабораторной работе:

а) синусоидальный сигнал частотой 5кГц;

б) видеоимпульсы прямоугольной формы длительностью 0,25; 0,5; 1,0 мс;

в) видеоимпульсы пилообразной формы длительностью 0,5 мс; 1,0 мс.

2. Рассчитать и построить идеальные выборочные сигналы для сигналов, указанных в п. 1а, 1б, 1в, при $f_{\text{выб}}=5, 10, 20, 40$ кГц.

Отчет

Отчет должен быть оформлен в текстовом редакторе и содержать:

¾ наименование работы;

¾ цель работы;

¾ задание;

¾ последовательность выполнения работы;

¾ ответы на контрольные вопросы;

¾ вывод о проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему Котельникова для сигналов с ограниченным спектром.

2. Объясните погрешности синтеза реальных сигналов по дискретным отсчетам.