Практическое занятие№4

Тема: Составление закона распределения вероятностей**.**

Цель: научиться составлять законы распределения вероятностей.
Время выполнения: 2 часа
Оборудование: ПК.
Программное обеспечение: операционная система, калькулятор.

Теоретические основы

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными ненулевыми вероятностями. Число возможных значений может быть конечным или бесконечным (счетным).

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень её возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения может быть задан одним из следующих способов.

1. Таблицей

x	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

2. Аналитически $P(X = x_i) = \varphi(x_i)$. Например:

а) *биномиальное распределение*

$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, 0<p<1, k=0, 1, 2, …, n;

б) *распределение Пуассона*

$P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, λ>0, k=0, 1, 2, … .

3. С помощью *функции распределения F(x)*, определяющей для каждого значения *x* вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее *x*, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

Свойства F(x):

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

4. Закон распределения может быть задан графически - *многоугольником распределения (см. пример 1).*

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание $M(X) = \sum_i x_i p_i$;

Дисперсия $D(X) = M[X - M(X)]^2$ или $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$;

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Для биномиального распределения *M(X)=np, D(X)=npq*. Для распределения Пуассона $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$.

Пример 1.

Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте, построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения F(x) и построить её график. Найти M(X), D(X), σ(X).

Решение: Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения: x_1=0 (ни один из элементов устройства не отказал), x_2=1 (отказал один элемент), x_3=2 (отказало два элемента) и x_4=3 (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что, по условию, n=3, p=0,1 (следовательно, q=1–0,1=0,9), получим: $P_3(0)=q^3=0{,}9^3=0{,}729$; $P_3(1)=C_3^1pq^2=3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2=0{,}243$;
$P_3(2)=C_3^2p^2q=3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9=0{,}027$; $P_3(3)=p^3=0{,}1^3=0{,}001$.

Контроль: $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$; 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

Искомый биномиальный закон распределения *X*:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

Для построения многоугольника распределения строим прямоугольную систему координат. По оси абсцисс откладываем возможные значения x_i, а по оси ординат – соответствующие им вероятности p_i. Построим точки M_1(0;0,729), M_2(1;0,243), M_3(2;0,027), M_4(3;0,001). Соединив эти точки отрезками прямых, получаем искомый многоугольник распределения (Рис.1).

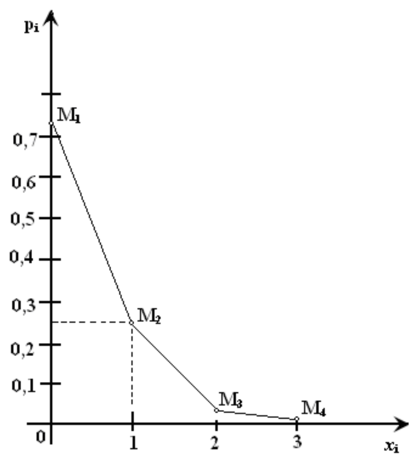

Рис.1

Найдем функцию распределения $F(x)=P(X<x)$.
Для $x\le 0$ имеем $F(x)=P(X<0)=0$;
для $0<x\le 1$ имеем $F(x)=P(X<1)=P(X=0)=0{,}729$;
для $1<x\le 2$ $F(x)=P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}729+0{,}243=0{,}972$;
для $2<x\le 3$ $F(x)=P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}972+0{,}027=0{,}999$;
для $x>3$ будет $F(x)=1$, т. к. событие достоверно.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ 0{,}729 & при \; 0 < x \le 1, \\ 0{,}972 & при \; 1 < x \le 2, \\ 0.999 & при \; 2 < x \le 3, \\ 1 & при \; x > 3. \end{cases}.$$

График этой функции приведен на Рис. 2.

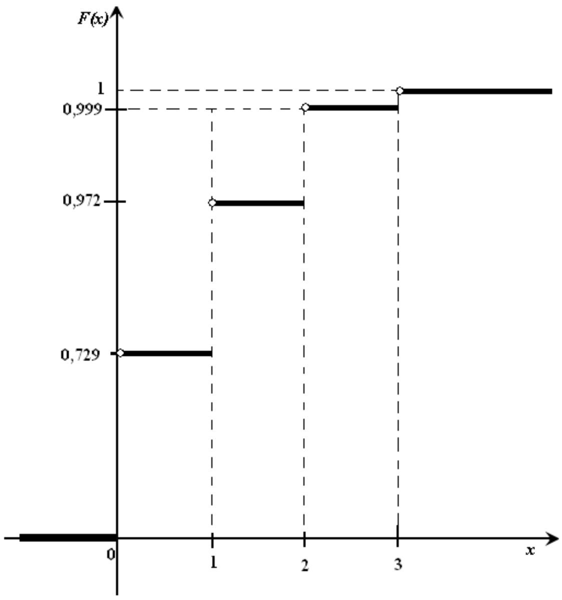

Рис. 2

Для биномиального распределения *M(X)=np*=3·0,1=0,3; *D(X)=npq*=3·0,1·0,9=0,27; σ(X)=$\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}27}\approx 0{,}52$.

Пример 2.

В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения случайной величины *X* – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти *M(X), D(X).*

Решение: Случайная величина *X* – число стандартных деталей среди отобранных деталей – имеет следующие возможные значения: x_1=0; x_2=1; x_3=2. Найдем вероятности возможных значений X по формуле (пример 2) $P(X=k)=\dfrac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$ (*N* – число деталей в партии, *n* – число стандартных деталей в партии, *m* – число отобранных деталей, *k* – число стандартных деталей среди отобранных), находим: $P(X=0)=\dfrac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{10\cdot 9/(1\cdot 2)}=\dfrac{1}{45}$;

$$P(X=1)=\frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 2}{45}=\frac{16}{45};$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{8\cdot 7/(1\cdot 2)}{45}=\frac{28}{45}.$$

Составим искомый закон распределения:

X	0	1	2
p	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Контроль: $\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1.$

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0\cdot\frac{1}{45}+1\cdot\frac{16}{45}+2\cdot\frac{28}{45}=\frac{72}{45}=\frac{8}{5}.$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2;\ M(X^2)=\sum_{i=1}^{3} x_i^{\,2} p_i = 0^2\cdot\frac{1}{45}+1\ \cdot\frac{16}{45}+2^2\cdot\frac{28}{45}=\frac{128}{45};$$

$$D(X)=\frac{128}{45}-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{128}{45}-\frac{64}{25}=\frac{64}{225}.$$

Пример 3.

В устройстве независимо друг от друга выходят из строя три элемента. Вероятность выхода из строя первого элемента – 0,3, второго – 0,2, третьего – 0,4. Составить закон распределения случайной величины X – числа вышедших из строя элементов.

Решение: случайная величина X имеет следующие возможные значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$. $p_1=0{,}3$, $q_1=1-p_1=0{,}7$, $p_2=0{,}2$, $q_2=1-p_2=0{,}8$, $p_3=0{,}4$, $q_3=1-p_3=0{,}6$.

P(X=k) вычисляем по следующим формулам (см. пример 4)

$$P(X=0)=q_1\cdot q_2\cdot q_3=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}336;$$

$$P(X=1)=p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot q_2\cdot p_3=0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6+0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}6+$$
$$+0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}144+0{,}084+0{,}224=0{,}452;$$

$$P(X=2)=p_1\cdot p_2\cdot q_3+p_1\cdot q_2\cdot p_3+q_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4+$$
$$+0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}118;$$

$$P(X=0)=p_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}024.$$

Контроль: 0,336+0,452+0,118+0,024=1.

Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3
p	0,336	0,452	0,118	0,024

***Пример 4*.**

Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно двум. Составить закон распределения случайной величины X – числа заказов, поступающих за 4 минуты. Найти M(X), D(X).

Решение: Поток заказов на такси можно считать *простейшим,* т. е. обладающим стационарностью, «отсутствием последствия» и ординарностью. *Интенсивность потока* (среднее число событий появляющихся в единицу времени) λ=2. Вероятность появления k событий простейшего потока за время t=4 определяется формулой Пуассона $P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k\ e^{-\lambda t}}{k!}$, для данной задачи $P_4(k)=\frac{8^k\ e^{-8t}}{k!}$. Совокупность возможных значений X есть счетное множество, т.е. $x_1=0,\ x_2=1,\ \ldots,\ x_k=k+1,\ \ldots;$ тогда закон распределения случайной величины X – числа заказов, поступающих за 4 минуты принимает вид:

X	0	1	2	…	k	…
p	$e^{-\lambda t}$	$\frac{(\lambda t)\ e^{-\lambda t}}{1!}$	$\frac{(\lambda t)^2\ e^{-\lambda t}}{2!}$	…	$\frac{(\lambda t)^k\ e^{-\lambda t}}{k!}$	…

или

X	0	1	2	…	k	…
p	e^{-8}	$\frac{8\ e^{8}}{1!}$	$\frac{8^2\ e^{-8}}{2!}$	…	$\frac{8^k\ e^{-8}}{k!}$	…

Воспользовавшись таблицей 3 приложения, окончательно получим:

X	0	1	2	…	k	…
p	0,00035	0,002684	0,010735	…	$\frac{8^k\ e^{-8}}{k!}$	…

Наивероятнейшее число заказов такси за 4 минуты можно определить по получившемуся закону распределения (значения x, при которых p максимально): $k'_0=7$, $k''_0=8$. Для простейшего потока событий: математическое ожидание $M(X)=\lambda t=8$, дисперсия $D(X)=\lambda t=8$.

Пример 5.

Даны законы распределения независимых случайных величин X и Y. Составить закон распределения случайной величины $Z=X+2Y$. Найти $M(Z)$, $D(Z)$.

X	-3	0	1
p	0,1	0,03	0,06

Y	1	3	6
p	0,2	0,5	0,3

Решение: Закон распределения $V=2Y$ получается из распределения Y путем умножения всех значений y_i на 2. Получаем:

V	2	6	12
p	0,2	0,5	0,3

.

Для составления закона распределения случайной величины Z вычислим все ее возможные значения по формуле $z_k = x_i + v_j$, $k = 1,2,..9$, $i, j = 1,2,3$.

Соответствующие данным значениям z_k вероятности p_k можно вычислить по формуле умножения вероятностей $P_k = P(Z = z_k) = P(X = x_i) \cdot P(V = v_j)$, т. к. события $X = x_i$ и $V = v_j$ - независимы (исходим из независимости случайных величин X и Y) и наступают совместно (событие $\{Z = z_k\}$ ={совместное наступление событий $X = x_i$ и $V = v_j$}). Тогда распределение Z принимает вид

Z	-1	3	9	2	6	12	3	7	13
p	0,02	0,05	0,03	0,06	0,15	0.09	0,12	0,3	0,18

Рассмотрим значения $z_2 = z_7 = 3$. События $Z = z_2$ и $Z = z_7$ несовместны, поэтому вероятность наступления хотя бы одного из этих событий вычисляется по правилу сложения вероятностей

$$P(Z = z_2 \cup Z = z_7) = P(Z = z_2) + P(Z = z_7) = 0,05 + 0,12 = 0,17$$

Искомый закон распределения случайной величины Z получается после размещения z_k по возрастанию. 6

Z	-1	2	3	6	7	9	12	13
p	0,02	0,06	0,17	0,15	0,3	0,03	0,09	0,18

Математическое ожидание *M(Z)* и дисперсию *D(Z)* можно найти по формулам:

$$M(Z) = \sum_{k=1}^{8} z_k p_k; \quad D(Z) = M(Z^2) - [M(Z)]^2, \text{ где } M(Z^2) = \sum_{k=1}^{8} z_k{}^2 p_k.$$

Рассмотрим другой способ.

M(Z) и *D(Z)* можно найти через *M(X), M(Y), D(X), D(Y).*

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -3 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 = 0,3$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j p_j = 0 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,3 = 3,3$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i{}^2 p_i - (M(X))^2 = (-3)^2 \cdot 0,1 + 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,6 - (0,3)^2 = 1,41$$

$$D(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j{}^2 p_j - (M(Y))^2 = 0^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,5 + 6^2 \cdot 0,3 - (3,3)^2 = 4,41$$

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 0,3 + 2 \cdot 3,3 = 6,9,$$

т. к. математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых; постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания.

$D(Z) = D(X + 2Y) = D(X) + D(2Y) = D(X) + 4D(Y) = 1{,}41 + 4 \cdot 4{,}41 = 19{,}05,$
т. к. дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых; постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат.

Пример 6.

Стрелок ведет стрельбу с вероятностью попадания в цель 0,8 при каждом выстреле. Стрельба ведется до первого попадания, но делается не более 3 выстрелов. Составить закон распределения случайной величины X, если: а) X – число промахов; б) X – число попаданий; в) X – число произведенных выстрелов.

Решение: Вероятность попадания p=0,8; вероятность промаха q=1-p=0,2.

а) Случайная величина X – число промахов при трех выстрелах – имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$.

Событие X=0 равносильно попаданию с первой попытки, следовательно, P(X=0)=p=0,8.

Событие X=1 равносильно попаданию со второй попытки, т. е. совместному наступлению двух событий: промаха и попадания; следовательно, P(X=1)=q$\cdot$p=0,2$\cdot$0,8=0,16.

Событие X=2 равносильно попаданию с третьей попытки, т. е. P(X=2)=q$\cdot$q$\cdot$p=0,2$\cdot$0,2$\cdot$0,8=0,032.

Событие X=3 означает отсутствие попаданий, P(X=3)=q$\cdot$q$\cdot$q=$0{,}2^3$=0,008.

Искомый закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0,8	0,16	0,032	0,008

б) Случайная величина X – число попаданий – имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (допущено три промаха); $x_2 = 1$ (произошло попадание с первой, второй или третьей попытки).

Тогда P(X=0)= $q^3 = 0{,}2^3$ =0,008;

P(X=1)= p+q$\cdot$p+q$\cdot$q$\cdot$p=0,8+0,16+0,032=0,992

или P(X=1)=1-P(X=0)=1-0,008=0,992.

Искомый закон распределения X:

X	0	1
P	0,008	0,992

в) Случайная величина X – число произведенных выстрелов – имеет следующие возможные значения: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Событие X=1 равносильно попаданию с первой попытки, т. е. P(X=1)=p=0,8.

Событие X=2 равносильно попаданию со второй попытки, т. е. P(X=2)=q$\cdot$p=0,16.

Событие X=3 означает, что либо произошло попадание с третьей попытки, либо было три промаха. Тогда P(X=3)=q$\cdot$q$\cdot$p+q$\cdot$q$\cdot$q=0,032+0,008=0,04.

Искомый закон распределения X:

X	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

Задачи

Вариант 1. Производятся последовательные независимые испытания приборов на надёжность. Каждый следующий прибор испытывается лишь в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить закон распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9. Найти математическое ожидание числа испытанных приборов. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график; найти M(X), σ(X); построить многоугольник распределения.

Вариант 2. Известно, что в партии из 20 телефонных аппаратов 5 недействующих. Случайным образом из этой партии взято 4 аппарата. Построить закон распределения случайной величины X – числа недействующих аппаратов из отобранных. Найти дисперсию этой случайной величины. В каких единицах она измеряется? Построить график функции распределения F(x) случайной величины X, многоугольник распределения.

Вариант 3. Сырье на завод привозят от трех независимо работающих поставщиков. Вероятность своевременного прибытия сырья от первого поставщика равна 0,4, от второго – 0,7, от третьего – 0,6. Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) числа своевременных поставок сырья. Найти функцию распределения и построить ее график.

Вариант 4. Завод получает сырье на автомашинах от трех независимо работающих поставщиков. Вероятность прибытия автомашины от первого поставщика равна 0,2, от второго – 0,3 и от третьего – 0,1. Составить распределение числа прибывших автомашин. Найти математическое ожидание и дисперсию полученной величины. Построить график функции распределения F(x).

Вариант 5. Вероятность изготовления бракованной детали p=0,1. Изготовлено 4 детали. X – случайное число бракованных деталей. Построить закон распределения случайной величины X, найти ее математическое ожидание и дисперсию. Построить график функции распределения, многоугольник распределения.

Вариант 6. Среднее число заявок, поступающих на предприятие бытового обслуживания за 1 час, ровно 2. Составить закон распределения случайной величины X – числа заявок, поступивших за 3 часа. Найти M(X), D(X) и наивероятнейшее число заявок за 3 часа.

Вариант 7. В среднем в магазин заходит 3 человека в минуту. Составить закон распределения случайной величины X – числа зашедших в магазин человек за 2 минуты. Построить многоугольник распределения. Найти M(X), D(X).

Вариант 8. Даны законы распределения независимых случайных величин

X	-3	0	1
P	0,1	0,3	0,6

Y	0	3	6
p	0,2	0,5	0,3

Составить законы распределения случайных величин:

а)XY; б) X+Y. Найти M(X+Y), D(X+Y). Справедливо ли равенство $M(X)\cdot M(Y)=M(X\cdot Y)$?

Вариант 9. Команда состоит из двух стрелков. Числа очков, выбиваемых каждым из них при одном выстреле, являются случайными величинами X_1 и X_2, которые характеризуются следующими законами распределения:

X_1	3	4	5
P	0,3	0,4	0,3

и

X_2	2	3	4	5
P	0,2	0,1	0,2	0,5

Результаты стрельбы одного стрелка не влияют на результат стрельбы другого. Составить закон распределения числа очков, выбиваемых командой, если стрелки сделают по одному выстрелу. Убедиться в справедливости равенства $D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$.

Вариант 10. Производятся выстрелы из орудия с вероятностью попадания в цель 0,9 при каждом выстреле. Стрельба ведётся до первого попадания, но делается не более 4 выстрелов. Составить закон распределения случайной величины X, если: а) X – число произведенных выстрелов; б) X – число промахов; в) X – число попаданий. Найдите математическое ожидание всех найденных случайных величин.

Отчет

Отчет должен содержать:
- наименование работы;
- цель работы;
- задание;
- последовательность выполнения работы;
- ответы на контрольные вопросы;
- вывод о проделанной работе.

Контрольные вопросы

1. Какие значения не может принимать вероятность?
2. Чему равна вероятность достоверного события? Невозможного?
3. Дайте определение закону распределения дискретной случайной величины.
4. Дайте определение математическому ожиданию?